从邻近点算法到均困的ALM和均困的ADMM

线性约束凸优化的 Lagrange 函数的鞍点相当于一个混合变分不等式的解点。增广拉格朗日法 (ALM) 和交替方向乘子法 (ADMM) 这些求解线性约束凸优化问题耳熟能详的方法, 实际上就是在求相应的变分不等式的解点。这些方法每步迭代的主要花费是求解原始变量的子问题, 乘子的矫正只需要通过简单的加加减减就能够实现。由于原始变量子问题的目标函数是一个非线性函数和一个非平凡二次函数的和, 这会给求解带来一定的困难。

邻近点算法 (PPA) 是求解变分不等式的步步为营、稳扎稳打的方法, 其迭代序列向解集一步一步收缩, 报告介绍了一些因需定制的 PPA 算法。此外, 在 PPA 意义下, 我们提出了均困的 ALM 方法和均困的 ADMM 方法, 它们把原始变量子问题中目标函数的非平凡二次项改成平凡的二次项, 降低了原始子问题的难度; 而乘子的矫正通过求解一个系数矩阵正定的线性方程组去完成, 从而实现均困。由于均困方法中乘子矫正的系数矩阵是保持不变的, 整个求解过程为乘子更新只要做一次正定矩阵的 Cholesky 分解。

这些"均困方法"已经被一些青年学者在相关研究中用来求解一些他们遇到的问题。有兴趣的读者可以参考 2021. arXiv: 2108.08554 [math.OC]

从收缩算法的统一框架到广义的PPA算法

线性约束的凸优化问题的拉格朗日函数的鞍点, 跟结构型单调变分不等式

$$w^* \in \Omega, \quad \theta(u) - \theta(u^*) + (w - w^*)^T F(w^*) \geq 0, \quad \forall\, w \in \Omega.$$

的解集是等价的。变量为 w 的经典的邻近点算法 (PPA), 其迭代序列 $\{w^k\}$ 具有

$$\|w^{k+1} - w^*\|_H^2 \leq \|w^k - w^*\|_H^2 - \|w^k - w^{k+1}\|_H^2$$

和

$$\|w^{k+1} - w^{k+2}\|_H^2 \leq \|w^k - w^{k+1}\|_H^2$$

这样非常漂亮的性质, 其中 H 为正定矩阵。

乘子交替方向法 (ADMM) 中, 每次迭代从给定的 $v^k = (y^k, \lambda^k)$ 开始, 给出新的 $v^{k+1} = (y^{k+1}, \lambda^{k+1})$。ADMM 的核心变量的迭代序列 $\{v^k\}$ 同样具有

$$\|v^{k+1} - v^*\|_H^2 \leq \|v^k - v^*\|_H^2 - \|v^k - v^{k+1}\|_H^2$$

和

$$\|v^{k+1} - v^{k+2}\|_H^2 \leq \|v^k - v^{k+1}\|_H^2$$

这样的性质, 这些性质也为一些加速 ADMM 方法提供了一些支撑。

我们对一般的凸优化问题所对应的变分不等式, 通过 Gauss 型预测-校正, 构造了相应的容易实现的广义邻近点算法 (Generalized PPA), 其迭代产生的序列同样具有上面所述的漂亮性质, 为拓展凸优化算法设计提供了新的思路。